Progetto GNAMPA 2023

Problemi variazionali per funzionali e operatori non-locali

Descrizione scientifica

PI: Giorgio STEFANI (Postdoc, SISSA)

Partecipanti: Konstantinos BESSAS (Dottorando, UNIPI); Davide CARAZZATO (Dottorando, SNS); Alessandro CARBOTTI (Postdoc, UNISALENTO); Simone CITO (Docente a Contratto, UNISALENTO); Giovanni Eugenio COMI (RTD-B, UNIBO); Anna KUBIN (Dottorando, POLITO); Roberta SCHIATTARELLA (Professore Associato, UNINA).

Obiettivi di ricerca

I partecipanti si occupano di problemi legati al Calcolo delle Variazioni, alla Teoria Geometrica della Misura, all'Analisi Funzionale e alle Equazioni alle Derivate Parziali. Nell'ambito del progetto si intendono studiare alcuni problemi riguardanti funzionali e operatori di tipo non-locale, elencati nei seguenti **12 obiettivi di ricerca**. Gli obbiettivi da (**O1**) a (**O6**) riguardano lo studio di funzionali non-locali, mentre gli obiettivi da (**O7**) a (**O12**) si interessano a questioni di operatori non-locali.

(O1) Problemi isoperimetrico e di Cheeger

Si intendono studiare problemi isoperimetrici e di Cheeger per funzionali di tipo non-locale, quali ad esempio l'r-perimetro di tipo Minkowski [26, 27] (relativo ad $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) anisotropo

$$P_r^C(E;\Omega) = \frac{|((\partial E) \oplus rC) \cap \Omega|}{2r}, \quad r > 0, \tag{1}$$

in ambito Euclideo, ove $C \subset \mathbb{R}^n$ è un convesso fissato (ad esempio, $C = B$ la palla), e l'analogo frazionario (definito tramite estensione alla Caffarelli–Silvestre [16]) del perimetro sub-Riemanniano nel piano di Grushin [47], sfruttando l'approccio generale di [37] (si veda (**O2**)).

(O2) Denoising non-locale di immagini

Nei recenti lavori [7, 8] è stato considerato il problema di denoising di immagine con fedeltà L^1

$$\min_{u \in BV^K} [u]_{BV^K} + \Lambda \|u - f\|_{L^1}$$

ove il termine regolarizzante è dato da una variazione totale di tipo non-locale

$$[u]_{BV^K} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u(y)| \, K(x-y) \, dx \, dy \tag{2}$$

indotta da un nucleo $K \geq 0$ con opportune proprietà (ad esempio, $K = |\cdot|^{-n-s}$ in $\mathbb{R}^n$). Si intende indagare ulteriormente questo tipo di problematica estendendo lo studio ad altri funzionali non-locali, rimpiazzando (2) con altre energie non-locali, quali ad esempio l'r-perimetro di tipo Minkowski (1) e il perimetro Gaussiano frazionario (4), con naturali collegamenti a problemi isoperimetrici e di Cheeger (si veda (**O1**)). Un altro funzionale non-locale regolarizzante da esaminare in tale contesto è la variazione distribuzionale introdotta da Comi–Stefani [28], con l'obiettivo di completare i risultati ottenuti nel recente lavoro [5]. Infine, si vuole considerare un termine regolarizzante dato da derivate frazionarie più classiche, quali le derivate di Riemann–Liouville, Caputo e Marchaud (si veda (**O7**)) o la variazione non-locale 1D studiata in [10] (si veda (**O11**)).

(O3) Problema di Gamow

Si vuole indagare il problema di Gamow per perimetri non-locali. Tale problema consiste nello studiare esistenza, unicità e regolarità dei minimi, con vincolo di volume, del funzionale

$$\mathcal{F}(E) = \mathcal{P}(E) + \int_E \int_E g(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{3}$$

ove $\mathcal{P}$ è un perimetro e g è un nucleo di interazione. Sulla scia dei recenti lavori [1, 19, 20, 35, 48], ci si propone di considerare il funzionale (3) ove $\mathcal{P}$ sia dato da un perimetro non-locale, quali l'r-perimetro di tipo Minkowski (1), il perimetro P_K indotto dalla seminorma (2) (sfruttando [8]), il perimetro frazionario Gaussiano (4), ed il perimetro frazionario distribuzionale introdotto da Comi–Stefani [28].

(O4) Convergenza del perimetro Gaussiano frazionario

Per $s \in (0,1)$, il perimetro Gaussiano frazionario (relativamente ad $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) è della forma

$$P_s^\gamma(E;\Omega) = \left(\int_{E\cap\Omega}\int_{E^c\cap\Omega} + \int_{E\cap\Omega}\int_{E^c\cap\Omega^c} + \int_{E\cap\Omega^c}\int_{E^c\cap\Omega}\right) K_s^\gamma(x,y)\,\mathrm{d}\gamma(x)\,\mathrm{d}\gamma(y) \tag{4}$$

ove γ è la misura Gaussiana in $\mathbb{R}^n$ e K_s^γ è il nucleo frazionario Guassiano indotto dal corrispondente operatore di Ornstein–Uhlenbeck (si veda [21] per le definizioni). Sulla base dei recenti risultati ottenuti in [21, 22], si vuole capire se il limite puntuale di $(1-s)P_s^\gamma(E;\Omega)$ per $s \to 1^-$ coincida col Γ-limite dato da $\frac{\sqrt{2}}{\pi}P^\gamma(E;\Omega)$, in analogia con il caso frazionario standard [4, 43]. Tale risultato avrebbe delle interessanti ripercussioni sullo studio delle superfici P_s^γ-minime, in maniera simile a [17].

(O5) Funzionali spettrali non-locali

Si intendono studiare esistenza, regolarità e alcune proprietà geometriche di insiemi ottimali per funzionali spettrali associati all'operatore Laplaciano frazionario con varie condizioni al bordo e/o in contesti diversi da quello Euclideo (ad esempio, in spazi con misura Gaussiana, si veda (**O4**)), sulla scia di alcuni recenti lavori [9, 14, 24]. Si intendono inoltre studiare funzionali di tipo misto, dati, ad esempio, dalla somma di un funzionale spettrale locale e di un termine non-locale, tipicamente di tipo potenziale di Riesz, in competizione tra loro (si veda (**O3**)). Il riferimento in tal senso è [46], nel quale il termine locale è il primo autovalore del Laplaciano o l'energia torsionale di un insieme con condizioni di Dirichlet. Si potrebbe infine studiare cosa accade se il termine spettrale viene sostituito da altri funzionali locali o non-locali per i quali si conosce la minimalità della palla (ad esempio, il primo autovalore di Robin con parametro di bordo positivo, o il primo autovalore del Laplaciano frazionario con condizioni di Dirichlet omogenee), con naturale collegamento a (**O1**).

(O6) Problemi di interfaccia libera a volume fissato

In [33] è stato studiato il problema di interfaccia libera a volume fissato $d \in (0, |\Omega|)$ dato da

$$\min\Big\{\mathcal{F}(u,E) : u = u_0 \text{ su } \partial\Omega,\ |E| = d\Big\},$$

con

$$\mathcal{F}(u,E) = \int_\Omega \sigma_E(x)\,|\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + P(E;\Omega), \tag{5}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato, $E \subset \Omega$ è un insieme misurabile, $\sigma_E = \alpha\chi_E + \beta\chi_{\Omega\setminus E}$ per $0 < \alpha < \beta$, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e $P(E;\Omega)$ è il perimetro di E relativo ad Ω. Questo modello si applica a problemi di ottimizzazione di forma, transizione di fase, e meccanica dei continui. Si vuole generalizzare lo studio in [33] ad analoghi non-locali del funzionale (5). Per esempio, si intende considerare funzionali in cui il termine dipendente dal gradiente sia della forma

$$\int_\Omega \sigma_E(x)\,|\nabla^s u(x)|^2\,dx \quad \text{oppure} \quad \int_\Omega \sigma_E(x)\int_\Omega \frac{|u(y)-u(x)|^2}{|y-x|^{n+2s}}\,dy\,dx$$

per $s \in (0,1)$, dove ∇^s è il gradiente frazionario studiato in [28, 50, 51].

(O7) Studio delle derivate frazionarie

Per $s \in (0,1)$, le derivate s-frazionarie sinistra e destra di Riemann–Liouville di una funzione $u\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ sufficientemente regolare, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, sono definite rispettivamente come

$$D^s_{a+}[u](x) = \frac{1}{\Gamma(1-s)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{u(t)}{(x-t)^s}dt,$$
$$D^s_{b-}[u](x) = -\frac{1}{\Gamma(1-s)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{u(t)}{(t-x)^s}dt,$$

si veda per esempio [49]. Tali derivate 1-dimensionali hanno numerose applicazioni nello studio della visco-elasiticità e in modellizzazioni della neurobiologia e della finanza. Nei recenti lavori [6, 12] è stata data una formulazione debole di tali derivate, in analogia con la teoria classica degli spazi di Sobolev, arrivando quindi a definire gli spazi di Sobolev frazionari sinistri/destri alla Riemann–Liouville. La relazione tra tali spazi e gli usuali spazi di Sobolev è stata studiata in [25], ove è stato inoltre introdotto lo spazio delle funzioni con variazione s-frazionaria sinistra/destra alla Riemann–Liouville limitata. Tutti i risultati citati prendono in considerazione intervalli (a,b) limitati. Si intende quindi estendere la teoria degli spazi di Sobolev e BV frazionari alla Riemann–Liouville su intervalli illimitati della retta reale, completando la teoria iniziata nel recente lavoro [42] per alcuni casi particolari. Ci si propone inoltre di estendere lo studio a derivate simili (ad esempio, Caputo e Marchaud), possibilmente anche in dimensione maggiore, in ottica di applicazioni a modelli di denoising di immagine (si veda (**O2**)).

(O8) Analisi in spazi di Sobolev non-locali

In [8, 36] è stato considerato lo spazio di Sobolev non-locale $W^{K,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ associato a

$$[u]^p_{W^{K,p}} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)-u(y)|^p\,K(x-y)\,dx\,dy, \tag{6}$$

ove $K \geq 0$ è un nucleo (nel caso $p = 1$, ci si riconduce alla seminorma (2)). Lo spazio $W^{K,p}(\mathbb{R}^n)$ generalizza lo spazio frazionario $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ (corrispondente a $K = |\cdot|^{-n-sp}$), si veda [30], e può essere localizzato ad un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Continuando la teoria iniziata in [8], si vuole studiare l'operatore di estensione $W^{K,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{K,p}(\mathbb{R}^n)$, in analogia con il caso frazionario. Condizioni sufficienti sulla regolarità del nucleo K e dell'aperto Ω per l'esistenza di tale operatore di estensione sono state recentemente enunciate in [36]. Si vuole capire se tali ipotesi siano sharp, e se valgano condizioni necessarie sulla regolarità dell'aperto Ω analoghe a quelle note nel caso frazionario [41, 52]. Si vuole inoltre opportunamente generalizzare l'approccio distribuzionale recentemente introdotto in [5, 45] negli spazi $W^{s,p}$ agli spazi $W^{K,p}$, al fine di ottenere analoghi non-locali delle stime div-curl e applicazioni al problema di denoising non locale (**O2**).

(O9) Regolarità di soluzioni distribuzionali di equazioni non-locali

Nel lavoro in preparazione [23] è presente una tecnica variazionale per provare la regolarità Hölderiana delle funzioni s-armoniche alternativa rispetto all'approccio pseudodifferenziale e alla rappresentazione tramite nucleo di Poisson. Si vuole estendere tale risultato ad operatori lineari frazionari meno regolarizzanti del Laplaciano frazionario, quali ad esempio l'operatore

$$\mathcal{L}_a^s u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, a\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right) dy$$

per qualche $a \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $a \geq \lambda > 0$, l'operatore A-armonico frazionario distributionale

$$\mathcal{L}_A^s u = -\mathrm{div}^s(A\nabla^s u),$$

ove A è una matrice e ∇^s e div^s sono rispettivamente il gradiente e la divergenza frazionari studiati in [28, 50, 51], ed infine il K-Laplaciano non-locale

$$(-\Delta)^K u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (u(y)-u(x))\, K(y-x)\, \mathrm{d}y \tag{7}$$

indotto da un opportuno nucleo $K \geq 0$ associato allo spazio $W^{K,2}$ (si veda (**O8**)). Per lo studio della regolarità per l'operatore in (7), si intende anche avvalersi dei risultati ottenuti in [32, 34, 36] e nelle referenze ivi citate, con possibili sviluppi per la teoria dei minimi e dei quasi minimi del K-perimetro (si veda [8]), in analogia con i risultati noti nel caso frazionario classico [15, 18].

(O10) Seminorme di tipo BMO e spazi di Sobolev frazionari

In [13] è stato introdotto un nuovo spazio funzionale $\mathcal{B} \subset L^1(Q)$ sul cubo unitario $Q \subset \mathbb{R}^n$ con $n > 1$, basato sulla seguente seminorma (ispirata allo spazio BMO di John–Nirenberg)

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\varepsilon\in(0,1)} \varepsilon^{n-1} \sup_{\mathcal{G}_\varepsilon} \sum_{Q'\in\mathcal{G}_\varepsilon} \fint_{Q'} \left| f(x) - \fint_{Q'} f \right| \mathrm{d}x, \tag{8}$$

dove $\mathcal{G}_\varepsilon$ è una collezione di ε-cubi $Q' \subset Q$ disgiunti con lati paralleli agli assi e cardinalità minore o uguale a ε^{1-n}. Recenti studi [3, 38, 40] hanno considerato una variante isotropa di (8) e hanno condotto ad una formula di rappresentazione della norma del gradiente di una funzione di Sobolev (o BV) che non necessita dell'uso delle derivate distribuzionali. Si vuole studiare un'opportuna variante della seminorma (8) per caratterizzare gli spazi di Sobolev frazionari $W^{s,p}$ per $p \in [1,\infty)$ e $s \in (0,1)$.

(O11) Variazione totale 1D non-locale

Si vuole studiare e generalizzare la variazione totale 1D frazionaria introdotta in [10] considerando, data $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ invertibile (in [10] è $\varphi(t) = t^s$ per $t \geq 0$ e $s \in (0,1]$),

$$TV^\varphi u\,(I) = \sup_{\sigma\in\mathcal{S}(I)} TV^\varphi_\sigma u, \quad \text{con} \quad TV^\varphi_\sigma u = \sum_{i=1}^n \varphi^{-1}\big(|u(x_i) - u(x_{i-1})|\big) \tag{9}$$

al variare delle suddivisioni $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{S}(I)$ di un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Questo tipo di variazione ha applicazioni allo studio delle equazioni di conservazione [11], e potrebbe essere considerata anche per applicazioni a problemi di denoising di immagine (si veda (**O2**)). Si vuole inoltre capire se la variazione (9) (a cominciare dal caso frazionario di [10]) soddisfi risultati di embedding analoghi a quelli recentemente dimostrati in [31, 39].

(O12) Flusso di curvatura media frazionario

Si propone di applicare l'approccio di [2] per approssimare il flusso di curvatura medio frazionario. Il procedimento consiste nel considerare una discretizzazione temporale del flusso ottenuta con il metodo dei movimenti minimizzanti e poi analizzare il limite quando il passo di discretizzazione tende a zero. Nel corrispondente caso locale, tale limite, sotto opportune ipotesi, è una soluzione distribuzionale del flusso di curvatura medio [44]. Tuttavia, al momento manca un risultato analogo nel caso frazionario. Inoltre, manca anche un risultato di esistenza del limite quando lo step temporale tende a zero, si vedano i progressi parziali compiuti in [29].

Bibliografia

[1] S. Alama, L. Bronsard, I. Topaloglu, and A. Zuniga, *A nonlocal isoperimetric problem with density perimeter*, Calc. Var. Partial Differential Equations **60** (2021), no. 1, Paper No. 1, 27.

[2] F. Almgren, J. E. Taylor, and L. Wang, *Curvature-driven flows: a variational approach*, SIAM J. Control Optim. **31** (1993), no. 2, 387–438.

[3] L. Ambrosio, J. Bourgain, H. Brezis, and A. Figalli, *BMO-type norms related to the perimeter of sets*, Comm. Pure Appl. Math. **69** (2016), no. 6, 1062–1086.

[4] L. Ambrosio, G. De Philippis, and L. Martinazzi, *Gamma-convergence of nonlocal perimeter functionals*, Manuscripta Math. **134** (2011), no. 3-4, 377–403.

[5] H. Antil, H. Díaz, T. Jing, and A. Schikorra, *Nonlocal bounded variations with applications* (2022). Preprint, available at arXiv:2208.11746.

[6] M. Bergounioux, A. Leaci, G. Nardi, and F. Tomarelli, *Fractional Sobolev spaces and functions of bounded variation of one variable*, Fract. Calc. Appl. Anal. **20** (2017), no. 4, 936–962.

[7] K. Bessas, *Fractional total variation denoising model with L^1 fidelity*, Nonlinear Anal. **222** (2022), Paper No. 112926, 20.

[8] K. Bessas and G. Stefani, *Non-local BV functions and a denoising model with L^1 fidelity* (2022). Preprint, available at arXiv:2210.11958v2.

[9] J. F. Bonder, A. Ritorto, and A. M. Salort, *Shape optimization problems for nonlocal operators* (2016). Preprint, available at arXiv:1612.08717.

[10] C. Bourdarias, M. Gisclon, and S. Junca, *Fractional BV spaces and applications to scalar conservation laws*, J. Hyperbolic Differ. Equ. **11** (2014), no. 4, 655–677.

[11] C. Bourdarias, A. P. Choudhury, B. Guelmame, and S. Junca, *Entropy solutions in BV^s for a class of triangular systems involving a transport equation*, SIAM J. Math. Anal. **54** (2022), no. 1, 791–817.

[12] L. Bourdin and D. Idczak, *A fractional fundamental lemma and a fractional integration by parts formula—Applications to critical points of Bolza functionals and to linear boundary value problems*, Adv. Differential Equations **20** (2015), no. 3-4, 213–232.

[13] J. Bourgain, H. Brezis, and P. Mironescu, *A new function space and applications*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 9, 2083–2101.

[14] L. Brasco, E. Cinti, and S. Vita, *A quantitative stability estimate for the fractional Faber-Krahn inequality*, J. Funct. Anal. **279** (2020), no. 3, 108560, 49.

[15] L. Caffarelli, J.-M. Roquejoffre, and O. Savin, *Nonlocal minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **63** (2010), no. 9, 1111–1144.

[16] L. Caffarelli and L. Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 7-9, 1245–1260.

[17] L. Caffarelli and E. Valdinoci, *Uniform estimates and limiting arguments for nonlocal minimal surfaces*, Calc. Var. Partial Differential Equations **41** (2011), no. 1-2, 203–240.

[18] M. C. Caputo and N. Guillen, *Regularity for non-local almost minimal boundaries and applications* (2010). Preprint, available at arXiv:1003.2470v2.

[19] D. Carazzato, *A note on some non-local variational problems*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. (2021). To appear, preprint available at arXiv:2107.11848v3.

[20] D. Carazzato, N. Fusco, and A. Pratelli, *Minimality of balls in the small volume regime for a general Gamow type functional*, Adv. Calc. Var. (2020). To appear, preprint available at arXiv:2009.03599.

[21] A. Carbotti, S. Cito, D. A. La Manna, and D. Pallara, *Gamma-convergence of Gaussian fractional perimeter*, Advances in Calculus of Variations (2021).

[22] ______, *Asymptotics of the s-fractional Gaussian perimeter as $s \to 0^+$*, Fract. Calc. Appl. Anal. **25** (2022), no. 4, 1388–1403.

[23] ______, *In preparation* (2023).

[24] ______, *A quantitative dimension free isoperimetric inequality for the fractional Gaussian perimeter*, Comm. Anal. Geom. (2024). To appear, preprint available at arXiv:2011.10451v5.

[25] A. Carbotti and G. E. Comi, *A note on Riemann-Liouville fractional Sobolev spaces*, Commun. Pure Appl. Anal. **20** (2021), no. 1, 17–54.

[26] A. Cesaroni, S. Dipierro, M. Novaga, and E. Valdinoci, *Minimizers for nonlocal perimeters of Minkowski type*, Calc. Var. Partial Differential Equations **57** (2018), no. 2, Paper No. 64, 40.

[27] A. Cesaroni and M. Novaga, *Isoperimetric problems for a nonlocal perimeter of Minkowski type*, Geom. Flows **2** (2017), no. 1, 86–93.

[28] G. E. Comi and G. Stefani, *A distributional approach to fractional Sobolev spaces and fractional variation: existence of blow-up*, J. Funct. Anal. **277** (2019), no. 10, 3373–3435.

[29] D. De Gennaro, A. Kubin, and A. Kubin, *Asymptotic of the discrete volume-preserving fractional mean curvature flow via a nonlocal quantitative Alexandrov theorem*, Nonlinear Anal. **228** (2023), Paper No. 113200, 23.

[30] E. Di Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci, *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bull. Sci. Math. **136** (2012), no. 5, 521–573.

[31] Ó. Domínguez, A. Seeger, B. Street, J. Van Schaftingen, and P.-L. Yung, *Spaces of Besov-Sobolev type and a problem on nonlinear approximation*, J. Funct. Anal. **284** (2023), no. 4, Paper No. 109775, 50.

[32] B. o. Dyda and M. Kassmann, *Regularity estimates for elliptic nonlocal operators*, Anal. PDE **13** (2020), no. 2, 317–370.

[33] L. Esposito and N. Fusco, *A remark on a free interface problem with volume constraint*, J. Convex Anal. **18** (2011), no. 2, 417–426.

[34] M. Felsinger, M. Kassmann, and P. Voigt, *The Dirichlet problem for nonlocal operators*, Math. Z. **279** (2015), no. 3-4, 779–809.

[35] A. Figalli, N. Fusco, F. Maggi, V. Millot, and M. Morini, *Isoperimetry and stability properties of balls with respect to nonlocal energies*, Comm. Math. Phys. **336** (2015), no. 1, 441–507.

[36] G. F. Foghem Gounoue, *L^2-Theory for Nonlocal Operators on Domains*, Ph.D. Thesis, 2020. Available at https://doi.org/10.4119/unibi/2946033.

[37] V. Franceschi, A. Pinamonti, G. Saracco, and G. Stefani, *The cheeger problem in abstract measure spaces* (2022). Preprint, available at arXiv:2207.00482.

[38] N. Fusco, G. Moscariello, and C. Sbordone, *BMO-type seminorms and Sobolev functions*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **24** (2018), no. 2, 835–847.

[39] L. Greco and R. Schiattarella, *An embedding theorem for BV-functions*, Commun. Contemp. Math. **22** (2020), no. 4, 1950032, 13.

[40] S. Guarino Lo Bianco and R. Schiattarella, *A BMO-type characterization of higher order sobolev spaces*, Potential Anal. (2022mar).

[41] A. Jonsson and H. Wallin, *A Whitney extension theorem in L_p and Besov spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (1978), no. 1, vi, 139–192.

[42] A. Leaci and F. Tomarelli, *Symmetrised fractional total variation for signal and image analysis* (2023). Preprint to appear.

[43] L. Lombardini, *Fractional perimeters from a fractal perspective*, Adv. Nonlinear Stud. **19** (2019), no. 1, 165–196.

[44] S. Luckhaus and T. Sturzenhecker, *Implicit time discretization for the mean curvature flow equation*, Calc. Var. Partial Differential Equations **3** (1995), no. 2, 253–271.

[45] K. Mazowiecka and A. Schikorra, *Fractional div-curl quantities and applications to nonlocal geometric equations*, J. Funct. Anal. **275** (2018), no. 1, 1–44.

[46] D. Mazzoleni and B. Ruffini, *A spectral shape optimization problem with a nonlocal competing term*, Calc. Var. Partial Differential Equations **60** (2021), no. 3, Paper No. 114, 46.

[47] R. Monti and D. Morbidelli, *Isoperimetric inequality in the Grushin plane*, J. Geom. Anal. **14** (2004), no. 2, 355–368.

[48] M. Novaga and F. Onoue, *Existence of minimizers for a generalized liquid drop model with fractional perimeter*, Nonlinear Anal. **224** (2022), Paper No. 113078, 28.

[49] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.

[50] T.-T. Shieh and D. E. Spector, *On a new class of fractional partial differential equations*, Adv. Calc. Var. **8** (2015), no. 4, 321–336.

[51] ______, *On a new class of fractional partial differential equations II*, Adv. Calc. Var. **11** (2018), no. 3, 289–307.
[52] Y. Zhou, *Fractional Sobolev extension and imbedding*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 2, 959–979.

Altre informazioni

Finanziamenti avuti per progetti gruppo a partire dal 2019:

- K. Bessas: 2022 *Fenomeni non locali in problemi locali* (partecipante) € 4.500; 2020 *Minimal clusters and minimal partitions* (partecipante) € 1.350.
- D. Carazzato: 2022 *Isoperimetric problems: variational and geometric aspects* (partecipante) € 4.500.
- A. Carbotti: nessuno.
- S. Cito: nessuno.
- G. E. Comi: 2022 *Problemi di semicontinuità: la riscoperta di alcuni strumenti classici e nuovi sviluppi* (partecipante) € 2.500.
- A. Kubin: nessuno.
- R. Schiattarella: 2022 *PDEs regolarità delle soluzioni, disuguaglianze collegate e applicazioni* (partecipante) € 2.500.
- G. Stefani: 2022 *Analisi geometrica in strutture subriemanniane* (partecipante) € 4.500; 2020 *Problemi isoperimetrici con anisotropie* (partecipante) € 1.800; 2019 *Problemi isoperimetrici in spazi Euclidei e non* (partecipante) € 3.000.

Partecipanti che nell'anno 2023 afferiscono a Progetti di Ricerca nazionali o internazionali (quali PRIN, ERC, FIRB e SIR):

- R. Schiattarella: Responsabile dell'Unità di ricerca di Napoli del progetto MIUR PRIN 2017 Stochastic Models for Complex Systems, Prot. n. 2017JFFHSH003 (2017 – 2023). PI: Fabrizio Durante.
- G. Stefani: Assegnista di Ricerca sul progetto ERC Starting Grant 2020 Geometric analysis of sub-Riemannian spaces through interpolation inequalities – GEOSUB (2021 – 2026). PI: Luca Rizzi.
